



TITLE:

Some Nonintegrable Nonlinear  
Evolution Equations(IV.生物物理・  
高分子,ソリトン系のダイナミクス  
とそれに関するカオスの問題,基研  
長期研究会報告)

AUTHOR(S):

田上, 由紀子

---

CITATION:

田上, 由紀子. Some Nonintegrable Nonlinear Evolution Equations(IV.生物物理・高分子,ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題,基研長期研究会報告). 物性研究 1984, 42(3): 486-491

ISSUE DATE:

1984-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/91368>

RIGHT:

## Some Nonintegrable Nonlinear Evolution Equations

筑波大・物理 田上由紀子

1. いくつかの非線形発展方程式の周期解の体系を調べ、それらの記述する物理系の kink の様相を考察する。ここで取り上げるのは

(i) one-dimensional time-dependent Ginzburg-Landau (TDGL) equation

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = L \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + g \left[ u(x, t) - \frac{1}{6} u(x, t)^3 \right] \right\}$$

$L, g$  は定数

(ii) a parabolic variant of sine-Gordon equation (SGE)

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = L \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - g \sin u(x, t) \right\}$$

$L, g$  は定数

(iii) coupled nonlinear evolution equations describing microdomain formation in polymers

$$\frac{1}{\chi Z} \frac{\partial}{\partial t} q_K(y, t) = \frac{\partial^2 q_K}{\partial y^2} - q_{\bar{K}}^2 q_K - \frac{1}{\epsilon} (q_K^2 + q_{\bar{K}}^2 - 1) q_K$$

$$K = A, B; \bar{K} = B, A$$

いずれも空間 1 次元および  $t$  を変数とするが、注意を要することは (i), (ii) では  $t$  は時間を表わすのに対し, (iii) における  $t$  は高分子鎖の一端から鎖に沿って測った座標であり,  $t \rightarrow \infty$  付近で物理的意味を持つことである。

2. (ii) あるいは SGE の定常解  $\phi^0$  を調べる。  $\phi^0$  は

$$\frac{d^2}{dy^2} \phi^0(y) - \sin \phi^0 = 0$$

の解である。いま  $\phi^0$  として SGE の孤立波の解の形のを仮定する。

$$\phi^0(y) = 4 \ln^{-1} [y \text{ の関数}]$$

すると、 $\phi^0(y)$  はつぎの形に整理されることが分かる。

$$\phi^0(y) = 4 t g^{-1} \left( \frac{1-h(y)}{1+h(y)} \right)^{1/2} = 2 \cos^{-1}(h(y))$$

$$h(y) \equiv \begin{cases} \operatorname{sn}(ky, 1/k), & k > 1 \\ \tanh y & \\ k \operatorname{sn}(y, k), & 1 > k > 0 \end{cases}$$

$h(y)$  の中の周期解は  $y$  についてずらして  $y=0$  が  $h(y)$  の零点となるようにしてある。

$h(y)$  は単振り子の解の組と一致している。

### 3. —(i)の解析—

与えられた方程式の進行波の解  $u(x, t) = M(x - vt)$  は

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{v}{L} \frac{dM}{dx} + g \left( 1 - \frac{1}{6} M^2 \right) M = 0$$

を解いて得られる。ゆっくりと進行している ( $\varepsilon = v/L$ ) 波を求めるのに

$$M(x; \varepsilon) = M_0(x) + \varepsilon M_1(x) + \varepsilon^2 M_2(x) + \dots$$

と展開すれば

$$M_0(x) = \pm \sqrt{\frac{12}{1+k^2}} h$$

$$M_1(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{3g}} \frac{1}{k^2 k'^4} \sqrt{(1-h^2)(k^2-h^2)}$$

$$\times \left\{ \left[ k'^2 u - (1+k^2) E(u) + h \left( \sqrt{\frac{1-h^2}{k^2-h^2}} + k^2 \sqrt{\frac{k^2-h^2}{1-h^2}} \right) \right]^2 \right.$$

$$\left. - k'^2 h^2 \left( \frac{1}{k^2-h^2} - \frac{k^4}{1-h^2} \right) \right\}$$

.....

となる。ここで

$$h = h \left( \sqrt{\frac{g}{1+k^2}} x \right)$$

で  $h(\ )$  は 2. で定義した解の組である。  $k = 1$  (single kink 解) での  $M_0(x)$  は Kawasaki 等<sup>1)</sup> により得られている。一般に  $k \neq 1$  で kink, anti-kink が交互に表われるので kink の幅を

$$\Delta(k) = (|dM(x)/dx|_{x=0})^{-1}$$

と定義 ( $x=0$  は kink) すれば (i) においては

$$\Delta(k)/\Delta(1) = (1+k^2)/2k,$$

$$\Delta(1) = 1/\sqrt{3g}$$

を得る。  $\Delta(k)/\Delta(1)$  は  $k$  が変わっても 1 より小さくならない。

#### 4. — (ii) の解析 —

3. と同様に進行波の解  $u(x, t) = M(x - vt)$  のうちゆっくりと伝わる ( $\varepsilon = v/L$ ) ものを求めれば

$$M_0(x) = 4t g^{-1} \left( \frac{1-h}{1+h} \right)^{1/2}$$

$$M_1(x) = - \frac{1}{\sqrt{g} k^2 k'^2} \sqrt{k^2 - h^2} \{ [k'^2 u - E(u)$$

$$+ h \sqrt{\frac{1-h^2}{k^2-h^2}} ]^2 - \frac{k'^2 h^2}{k^2-h^2} \}$$

.....

となる。ただし  $h = h(\sqrt{g}x)$  である。 kink の幅は

$$\Delta(k)/\Delta(1) = 1/k,$$

$$\Delta(1) = 1/2 \sqrt{g}$$

となり, (i) の場合と異なり  $k$  が増すにつれ単調減少している。(ii) の式は (penetration depth に比べて) 幅の広い Josephson junction における電流電圧特性の解析に用いられている。<sup>2)</sup>

#### 5. — (iii) の解析 —

2 種の互いに混合しない直鎖状の高分子  $A, B$  の体系で不規則な相分離が観測される。また  $A$  の端と  $B$  の端を化学的に接続したもの  $AB$  の体系が規則的な相分離—ドメイン構造—(数百

A ぐらいの大きさを問題とするためマイクロ相分離と呼ぶ)を呈することもよく知られている。この現象の界面形成の理論は Helfand と Tagami<sup>3)</sup>が行った。簡単のため A 種, B 種は物理的に区別出来ないものとし, 高分子 A, B はそれぞれ Z 個の A 小球, B 小球を連ねたものとする。この体系の状態は (bulk の球密度  $\rho_0$  で規格化された) A 小球または B 小球の密度  $\rho_K$

$$\frac{\rho_K(y)}{\rho_0} = \tilde{\rho}_K(y) = \int_0^1 dt q_K(y, 1-t) q_K(y, t)$$

$$K = A, B$$

で記述される。  $q_K$  は K 種の高分子の分配関数に比例する量で

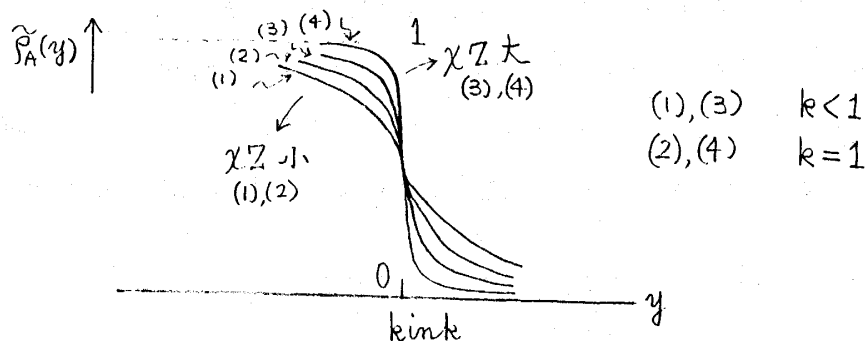
$$\frac{1}{\chi Z} \frac{\partial}{\partial t} q_K(y, t) = \frac{\partial^2 q_K}{\partial y^2} - \tilde{\rho}_{\bar{K}} q_K - \frac{1}{\varepsilon} (\tilde{\rho}_K + \tilde{\rho}_{\bar{K}} - 1) q_K$$

$$\bar{K} = B, A$$

の解である。  $\chi$  は A, B 間の相互作用,  $\varepsilon$  は体系の圧縮性に関係した量で  $\varepsilon$  は小さい。 さて上の 4 式を self-consistent に解くにあたって 1. で述べた  $t$  の性質から, 下の式の右辺の  $\tilde{\rho}_K$  を  $q_K^2$  で近似して (iii) の式を得る。 (iii) の式で  $\varepsilon$  が小さいとき (ii) の型の式が現われるから, 2. の  $h(y)$  を用いて, (途中の計算を省略して) 結果を示せば

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_A(y) = & \frac{1}{2} (1-h) \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{16k^2} ((5k^2+2)h^2 - (7k^2-2)h - 4k^2(2+k^2)) \right. \\ & + 2 \sqrt{\frac{(1+h)(k^2-h^2)}{1-h}} [(2k^2-1)E(u) + k'^2 u] \} \\ & \times \left\{ 1 + \frac{2C}{\lambda} (1-e^{-\lambda}) h \sqrt{\frac{1+h}{1-h}} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{16k^2} ((7k^2-2)h \right. \right. \\ & - 2 \sqrt{\frac{k^2-h^2}{1-h^2}} [(2k^2-1)E(u) + k'^2 u] \\ & - k^4 \left( [E(u) + \frac{\sqrt{(1-h^2)(k^2-h^2)}{h}]^2 + 1 + k^2 - \frac{k^2}{h^2} \right. \\ & \left. \left. - u^2 \frac{E}{K} - 2 \log \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} \right) \right) \} \end{aligned}$$

$$\tilde{\rho}_B(y) = \tilde{\rho}_A(-y)$$



(i), (ii) の解析と同様に kink の幅を求めれば

$$A(k) / A(1) = 1/k$$

となり (ii) の形となる。この結果を ( $A, B$  を接続した)  $AB$  の体系は (接続していない)  $A + B$  の体系に比べて隣接する二相間の混入が起り易いという観察結果と照合すると、高分子ミクロ相分離は  $k \leq 1$  の場合に対応すると言えよう。また、得られた  $\tilde{\rho}_K$  を用いて kink 付近での界面張力  $\gamma(k)$  を求めることもできて

$$\gamma(k) / \gamma(1) = E(k) - k'^2 K(k)$$

と与えられる。 $A(1), \gamma(1)$  はそれぞれスケールする前の各量に戻って評価する(これらの値は文献 3 にある)。この問題で  $k = 1$  (single kink 解) での解析は文献 3 で行われているが、周期解の場合の解析は今回初めて行われた。この体系に関する周期的性質の実験結果や数値計算は多い。

ここ迄に述べた手法はこの他 nonlinear Schrödinger equation などにも適用できる。<sup>4)</sup>

以上で、限られた枚数のため省略した部分については文献 5 を参照されたい。

## 6. 主な記号の説明

- $\left\{ \begin{array}{ll} u & \text{第一種不完全楕円積分 (modulus } k) \\ K & \text{第一種完全楕円積分 ( " )} \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{ll} E(u) & \text{第二種不完全楕円積分 ( " )} \\ E & \text{第二種完全楕円積分 ( " )} \end{array} \right.$
- $k' = \sqrt{1 - k^2}$  complementary modulus

$\Theta(u)$  Jacobi の theta 関数

参 考 文 献

- 1) K. Kawasaki and T. Ohta, Physica **116A**, (1982) 573.
- 2) J. T. Waldram, A. B. Pippard, and J. Clarke, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **268**, (1970) 265.
- 3) E. Helfand and Y. Tagami, J. Chem. Phys. **56**, (1972) 3592.
- 4) Suggested by Professor R. Hirota.
- 5) Y. Tagami, J. Math. Phys. to appear.

Superspace Formulation of Classical Spectral Transformation  
Method for the Massive Thirring Model

筑波大・物理 表 実, 井上和彦

この報告では Massive Thirring Model を量子逆散乱法 (又は Quantum Spectral Transformation Method) で議論するための準備としてこのモデルの古典逆散乱問題 (又は Classical Spectral Transformation Method) を調べる。 Fermion field を古典論で議論するにはその場は

Grassman-valued field ( $\psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i = 0, \psi_i^2(x) = 0$ )

として取り扱う必要がある。このため以下の議論は Fermion field を含む系の古典逆散乱問題の formulation としても興味深いと思われる。

散乱問題を議論するために 2 成分からなる Super field  $\Phi(x, t, \theta)$  を導入する。ここで  $\theta$  は Grassman number ( $\theta^2 = 0$ ) である。この field についての Lax pair を次式で与える。

$$i \partial_x \Phi(x, t, \theta) = L \Phi(x, t, \theta), \quad (1)$$

$$i \partial_t \Phi(x, t, \theta) = M \Phi(x, t, \theta), \quad (2)$$

上式で  $L, M$  は Superspace での operator であり, 2 行 2 列の行列  $L_i, M_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) をつかって次のように表わされる。

$$L = L_1 + L_2 \partial_\theta + \theta L_3 + \theta L_4 \partial_\theta, \quad (3)$$